Известия НАН Армении, Физика, т.40, 6, с. 391-398 (2005)

УДК 535.016

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ГОЙНА В ВИДЕ РЯДОВ ПО ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Р.С. СОХОЯН, Д.Ю. МЕЛИКДЖАНЯН, А.М. ИШХАНЯН

Инженерный центр НАН Армении

(Поступила в редакцию 1 марта 2005 г.)

Представлены новые разложения решений общего уравнения Гойна в ряды по гипергеометрическим функциям. Вид гипергеометрических функций Гаусса, использованных в качестве функций разложения, отличается от вида ранее использованных функций. Получены три таких разложения и, далее, путем обрывания ряда генерированы замкнутые решения для нескольких наборов вовлеченных параметров.

1. Введение

Функции Гойна [1], удовлетворяющие следующему линейному дифференциальному уравнению второго порядка с четырьмя регулярными особыми точками $z = 0, 1, a$ и ∞:

$$u'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a} \right) u' + \frac{\alpha\beta\, z - q}{z(z-1)(z-a)} u = 0 \qquad (1)$$

(где параметры уравнения удовлетворяют условию Фукса $1 + \alpha + \beta = \gamma + \delta + \varepsilon$, обеспечивающему регулярность бесконечно удаленной особой точки) и функции, удовлетворяющие четырем вырожденным уравнениям Гойна, генерированным коалесценцией сингулярностей вышеприведенного уравнения [2,3], в ближайшем будущем, по всей вероятности, станут частью следущего поколения стандартных специальных функций математической физики. Уравнение (1) представляет собой наиболее общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка класса Фукса с четырьмя особыми точками: любое подобное уравнение с четырьмя особыми точками соответствующим преобразованием независимой и зависимой переменных может быть сведено к уравнению Гойна.

Поскольку общее уравнение Гойна (1) вследствие наличия дополнительной регулярной особой точки представляет собой естественное обобщение гипергеометрического уравнения Гаусса [4], уравнения класса Гойна часто встречаются в современных физических и математических исследованиях; подобные случаи слишком многочислены, чтобы быть подробно представленными здесь (для ознакомления см. обзор [2]). Однако, эти уравнения гораздо менее изучены, чем уравнения гипергеометрического класса; как отмечено в [2] (стр. 4): «трудности, которые возникают при исследовании этих

уравнений по крайней мере на порядок больше, чем трудности, возникающие при решении гипергеометрического уравнения». По этой причине решения, выражаемые через специальные функции, которые удовлетворяют менее сложным дифференциальным уравнениям, представляют существенный интерес.

Однако, точные решения уравнений Гойна, выражаемые через более простые математические функции (в частности, гипергеометрические функции) крайне редки. Один из возможных путей получения таких решений – преобразование независимой и зависимой переменных, с целью свести рассматриваемые уравнения к более простым [5,6]. Потенциал этого подхода был недавно продемонстрирован Майером, который изучил сведение уравнения Гойна к гипергеометрическому уравнению путем полиномиального (квадратического, кубического и т. д.) и нескольких рациональных преобразований переменных [5].

Однако, наиболее ***систематическим*** методом получения точных решений уравнений Гойна является обрывание некоторого ряда (фактически это дает наиболее многочисленный набор доселе известных решений, задаваемых в замкнутой форме). Такие разложения впервые были рассмотрены Свартгольмом и Эрдейи [7]. Позднее, эта техника была применена к уравнению Гойна (1) и его вырожденным формам многочисленными авторами. Разложения по гипергеометрическим функциям (Гаусса и вырожденной) были построены и применены в ряде задач [2].

В данной статье мы представляем новые разложения решений общего уравнения Гойна в ряд по гипергеометрическим функциям Гаусса. Мы показываем, что эти разложения порождают точные замкнутые решения для нескольких бесконечных наборов специфических значений вовлеченных параметров. Так как полученные точные решения сгенерированы при помощи регулярного систематического алгоритма, они могут быть с легкостью внедрены в компьютерную символьную алгебру.

2. Виды разложений

Введем решение уравнения (1) в виде

$$u = \sum_n a_n u_n = \sum_n a_n \cdot {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma_0 - n; z) \tag{2}$$

с вовлеченной гипергеометрической функцией Гаусса, удовлетворяющей следующему уравнению:

$$u_n'' + \left(\frac{\gamma_0 - n}{z} + \frac{\delta + \varepsilon + \gamma - \gamma_0 + n}{z-1} \right) u_n' + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} u_n = 0 . \tag{3}$$

Подстановка уравнения (2) в уравнение (1) дает

$$\sum_n a_n \left[\left(\frac{\gamma - \gamma_0 + n}{z} - \frac{\varepsilon + \gamma - \gamma_0 + n}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a} \right) u_n' + \frac{\alpha\beta a - q}{z(z-1)(z-a)} u_n \right] = 0 \tag{4}$$

или же

$$\sum_n a_n \left\{ [(a-1)(\varepsilon + \gamma - \gamma_0 + n)z - a(\gamma - \gamma_0 + n)(z-1)] u_n' + (\alpha\beta a - q) u_n \right\} = 0 . \tag{5}$$

Далее, используя следующие соотношения между гипергеометрическими функциями

$$z\cdot\frac{d\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)}{dz}=(\gamma-1)[{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;z)-{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)], \tag{6}$$

$$(z-1)\cdot\frac{d\,{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)}{dz}=-(\alpha+\beta-\gamma)\cdot{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)+\left(\alpha+\beta-\gamma-\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)\cdot{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma+1;z), \tag{7}$$

так что

$$z\cdot u_n'=\gamma_{n+1}[u_{n+1}-u_n], \tag{8}$$

$$(z-1)\cdot u_n'=-\delta_{n-1}u_n+\left(\delta_{n-1}-\frac{\alpha\beta}{\gamma_n}\right)u_{n-1}, \tag{9}$$

где $\gamma_n=\gamma_0-n$ и $\delta_n=\delta+\varepsilon+\gamma-\gamma_0+n$, это уравнение непосредственно записывается как

$$\begin{aligned}&\sum_n a_n\Big[(a-1)(\varepsilon+\gamma-\gamma_0+n)(\gamma_n-1)[u_{n+1}-u_n]\\&+a(\gamma-\gamma_0+n)\left((\delta_n-1)u_n-\left(\delta_{n-1}-\frac{\alpha\beta}{\gamma_n}\right)u_{n-1}\right)+(\alpha\beta\,a-q)u_n\Big]=0,\end{aligned} \tag{10}$$

откуда мы получаем трехчленное рекуррентное соотношение для коэффициентов разложения (2)

$$R_n a_n+Q_n a_{n-1}+P_n a_{n-2}=0, \tag{11}$$

где

$$R_n=-a(\gamma-\gamma_0+n)\left(\delta+\varepsilon+\gamma-\gamma_0+n-1-\frac{\alpha\beta}{\gamma_0-n}\right), \tag{12}$$

$$\begin{aligned}Q_n&=-(a-1)(\varepsilon+\gamma-\gamma_0+n-1)(\gamma_0-n)\\&+a(\gamma-\gamma_0+n-1)(\delta+\varepsilon+\gamma-\gamma_0+n-2)+(\alpha\beta a-q)\end{aligned} \tag{13}$$

$$P_n=(a-1)(\varepsilon+\gamma-\gamma_0+n-2)(\gamma_0-n+1). \tag{14}$$

Наконец, для обрывания ряда слева положим $a_{-2}=a_{-1}=0$ и потребуем, чтобы a_0 было произвольной постоянной. Следовательно, должно иметь место равенство $R_0=0$, и из уравнения (12) получаем, что необходимо, чтобы

$$\gamma_0=\gamma \text{ или } \alpha \text{ или } \beta. \tag{15}$$

Таким образом, мы построили три разложения решений уравнения Гойна в ряд по гипергеометрическим функциям вида ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0-n;z)$ с $\gamma_0=\gamma,\alpha,\beta$. По крайней мере одно из этих разложений может быть применено для любого набора параметров уравнения Гойна, если γ,α,β одновременно не являются целыми числами. Функции, примененные выше, отличаются от тех, что использовали Свартгольм, Эрдейи и Шмидт [7] в ранних исследованиях разложений по гипергеометрическим функциям; они использовали функции вида ${}_2F_1(\lambda+n,\mu-n;\gamma;z)$ (см. обзор Арскотта на эту тему [2]). Эти разложения отличаются также от разложений по полиномам Якоби, построенных Калнинсом и Миллером, функции которых могут быть выражены через функции вида ${}_2F_1(\lambda+n,\mu-n;\nu+2n;z)$ [8].

Здесь мы рассматриваем случаи, когда разложения обрываются, образуя замкнутые решения. Очевидно, это происходит тогда, когда любые два последовательных

коэффициента в разложении (2) равны нулю. Пусть a_n суть последний ненулевой коэффициент: $a_n \neq 0$, $a_{n+1} = 0$ и $a_{n+2} = 0$ для некоторого $n = N \geq 0$. Это приводит к наложению двух условий на параметры уравнения Гойна. Во-первых, из уравнения (11), записанного для $n = N + 2$, мы заключаем, что $P_{N+2} = 0$, следовательно, должно иметь место

$$\varepsilon, \varepsilon + \gamma - \alpha \text{ или } \varepsilon + \gamma - \beta = -N \tag{16}$$

для первого, второго и третьего разложения соответственно ($N = 0, 1, 2, \ldots$). Второе условие удобно записать в виде бесконечной дроби

$$Q_1 - \cfrac{R_1 P_2}{Q_2 - \cfrac{R_2 P_3}{Q_3 - \cfrac{R_3 P_4}{Q_4 - \ldots}}} = 0 . \tag{17}$$

Подстановка сюда уравнения (16) обрывает дробь и таким образом приводит к полиномиальному уравнению порядка $N+1$ для вспомогательного параметра q. Следовательно, вообще говоря, для любого заданного N существует $N+1$ случаев, для которых разложение (2) обрывается. Тогда решение уравнения Гойна представляет собой линейную комбинацию $N+1$ гипергеометрических функций.

В случае $\gamma_0 = \gamma$ вовлеченные гипергеометрические функции имеют вид $u_n = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma - n; z)$. Решения, представляемые конечными суммами функций этого вида впервые были получены Крастером и коллегами [9]. Таким образом, бесконечное разложение (2) является прямым обобщением идеи Крастера. Для этого случая условие обрывания дается выражением $\varepsilon = -N$, $N = 0, 1, 2, \ldots$. Используя уравнения (11)-(17), нетрудно выписать в явном виде решения, задаваемые конечными суммами, и соответствующие уравнения для вспомогательного параметра. Ниже представлены первые три из них (одно-, двух- и трехчленные решения) (сравни с [9]):

$$\varepsilon = 0 , \text{ (тривиальный случай)} \tag{18}$$

$$q - a\alpha\beta = 0 , \tag{19}$$

$$u = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) , \tag{20}$$

$$\varepsilon = -1 , \tag{21}$$

$$(q - a\alpha\beta)^2 + [(1-a)(\gamma - 1) + a(1-\delta)](q - a\alpha\beta) - a(1-a)\alpha\beta = 0 , \tag{22}$$

$$u = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) + \frac{(\gamma - 1)(q - a\alpha\beta + (1-a)(\gamma - 1))}{a(\alpha\beta - (\gamma - 1)(\delta - 1))} \cdot {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma - 1; z) , \tag{23}$$

$$\varepsilon = -2 , \tag{24}$$

$$x^3 + [3\gamma + a(-3\gamma - 3\delta + 8) - 4]x^2$$

$$+ 2[2 - 3\gamma + \gamma^2 - 2a(\alpha\beta + (\gamma - 1)(\gamma + \delta - 3)) + a^2(2\alpha\beta + (\gamma + \delta - 3)(\gamma + \delta - 2))]x$$

$$-4a(a-1)\alpha\beta[-\gamma + a(\gamma + \delta - 2) + 1] = 0 , \tag{25}$$

$$u={}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)+a_1\cdot{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-1;z)+a_2\cdot{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma-2;z)\,, \tag{26}$$

где $x=q-a\alpha\beta,\ a_1=-Q_1/R_1,\ a_2=-(Q_2a_1+P_2)/R_2$.

Второе независимое решение, дополнительное к данным решениям, дается разложением

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0-n;1-z)\,, \tag{27}$$

где значение γ_0 определяется равенством

$$\gamma_0=\delta\,, \tag{28}$$

а коэффициенты a_n определяются теми же рекуррентными соотношениями (11)-(14) с параметрами, переопределенными следующим образом: $\gamma\leftrightarrow\delta$, $\gamma_0\to\delta$, $a\to1-a$, $q\to-q+\alpha\beta$. Для того, чтобы убедиться в этом, сперва отметим, что преобразование независимой переменной $z=1-x$ приводит начальное уравнение Гойна (1) к виду

$$u''+\left(\frac{\delta}{x}+\frac{\gamma}{x-1}+\frac{\varepsilon}{x-(1-a)}\right)u'+\frac{\alpha\beta x-(-q+\alpha\beta)}{x(x-1)(x-(1-a))}u=0\,, \tag{29}$$

так что вышеприведенное разложение (2) также может быть применено к этому уравнению. И разложение (27) с (28) как раз является искомым разложением. Более того, существенно, что разложение (27) обрывается при точно таких же значениях вспомогательного параметра q, что и предыдущее разложение (2). Следовательно, разложения (2) и (27) представляют собой два линейно независимых решения, выражаемых через конечную сумму функций, для одного и того же набора параметров начального уравнения Гойна (1).

Что касается решений, выражаемых через конечную сумму функций, сгенерированных выбором $\gamma_0=\alpha$ или β, то эти два решения идентичны благодаря $\alpha\leftrightarrow\beta$ перестановочной симметрии уравнения (1). Вовлеченные же гипергеометрические функции в этом случае имеют вид $u_n={}_2F_1(\alpha,\beta;\alpha-n;z)$ [или ${}_2F_1(\alpha,\beta;\beta-n;z)$], так что могут быть сведены к более простым функциям. Эти функции могут быть выражены через полиномы Якоби с определенными параметрами. Применяя формулу [4]

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\alpha-n;z)=(1-z)^{-\beta-n}\cdot{}_2F_1(-n,-\beta+\alpha-n;\alpha-n;z)\,, \tag{30}$$

можно показать, что конечная сумма в итоге может быть представлена в виде произведения функции $(1-z)^{1-\delta}$ и полинома по степеням z. Запишем два первых решения:

$$\varepsilon+\gamma-\alpha=0\ \ (\Leftrightarrow\ \ \beta=\delta-1)\,, \tag{31}$$

$$q-a\gamma(\delta-1)=0\,,\quad u=(1-z)^{1-\delta}\,, \tag{32}$$

$$\varepsilon+\gamma-\alpha=-1\ \ (\Leftrightarrow\ \ \beta=\delta-2)\,, \tag{33}$$

$$q^2+[\gamma-a(\delta-2+\gamma(2\delta-3))+\varepsilon]q-a\gamma(\delta-2)[(1+\gamma+\varepsilon)-a(1+\gamma)(\delta-1)]=0\,, \tag{34}$$

$$u=(1-z)^{1-\delta}\left(1-\frac{2+\gamma-\delta+\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}z+\frac{q-a(\alpha\beta+\varepsilon-\delta\varepsilon)}{(1-a)(\gamma+\varepsilon)}(1-z)\right). \tag{35}$$

Отметим, наконец, что преобразование $u=(1-z)^{1-\delta}v(z)$ приводит к уравнению Гойна для $v(z)$ с параметрами $\gamma_1=\gamma$, $\delta_1=2-\delta$, $\varepsilon_1=\varepsilon$, $\alpha_1\beta_1=\alpha\beta-(\delta-1)(\gamma+\varepsilon)$ и $q_1=q-a\gamma(\delta-1)$. Следовательно, случаи $\varepsilon+\gamma-\alpha=-N$ (и $\varepsilon+\gamma-\beta=-N$) могут быть рассмотрены как некоторые случаи полиномиальных решений уравнения для v: случай (31)-(32) соответствует тривиальному решению уравнения для v, когда $\alpha_1\beta_1=0$ и $q_1=0$.

3. Заключение

Итак, мы представили новый тип разложения решений общего уравнения Гойна в ряд по гипергеометрическим функциям Гаусса. Мы показали, что если ни один из параметров γ,α,β не является целым числом, то решения уравнения Гойна допускают разложения вида

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot{}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0-n;z)\ \text{с}\ \gamma_0=\gamma,\alpha,\beta. \tag{36}$$

Эти разложения генерируют замкнутые решения в трех случаях: ε, $\varepsilon+\gamma-\alpha$, $\varepsilon+\gamma-\beta=-N$, $N=0,1,2,3,\ldots$. В каждом случае общее уравнение Гойна допускает замкнутые решения, вообще говоря, при $N+1$ выборе вспомогательного параметра q, определяемого полиномиальным уравнением порядка $N+1$. Наиболее нетривиальный случай получается при целом отрицательном ε ($\varepsilon=-N$), когда решения содержат $N+1$ гипергеометрическую функцию, в общем случае не сводимую к более простым функциям. Далее, поскольку для любого ***положительного*** целого $\varepsilon=+N\geq 2$ преобразование $u=(z-a)^{1-\varepsilon}v(z)$ приводит к уравнению Гойна с нулевым или отрицательным целым показателем $\varepsilon_1=2-\varepsilon\leq 0$:

$$v''+\left(\frac{\gamma}{z}+\frac{\delta}{z-1}+\frac{2-\varepsilon}{z-a}\right)v'+\frac{(\alpha\beta-(\varepsilon-1)(\gamma+\delta))z-(q-\gamma(\varepsilon-1))}{z(z-1)(z-a)}v=0, \tag{37}$$

то, следовательно, применяя вышеприведенные разложения к этому уравнению, мы можем построить разложения, содержащие гипергеометрические функции вида ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma_0-n;z)$ также для положительного целого $\varepsilon=+N\geq 2$. (В этом случае для q мы получим уравнение порядка $N-1$, и разложение будет содержать $N-1$ гипергеометрическую функцию.) Таким образом, среди целых ε нерассмотренным остается лишь случай $\varepsilon=1$.

Полученные решения вместе с другим большим набором, порожденным обрывынием разложений по бета-функциям, представленным в нашей более ранней статье [10], составляют наиболее многочисленный ныне известный набор замкнутых решений уравнения Гойна. Точные решения получены простым методом, используя регулярный, систематический алгоритм, который может быть легко внедрен в компьютерную символьную алгебру таких систем как Mathematica и Maple.

В заключение следует отметить, что, очевидно, аналогичные разложения могут быть построены и для других уравнений, в том числе и для уравнений, принадлежащих к классу вырожденных уравнений Гойна. Например, можно попытаться разложить решения однократно вырожденного уравнения Гойна, используя вырожденные

гипергеометрические функции Куммера вида ${}_1F_1(\alpha,\gamma_0-n;z)$. Открываются также дополнительные возможности, если в качестве базовых функций разложения использовать ***комбинации*** этих функций, так же как, если предварительно преобразовать исходное уравнение путем замены независимой и зависимой переменных (примеры таких разложений были построены в одной из наших последних работ [11]). Мы рассмотрим эти возможности в последующих публикациях.

Работа выполнена при поддержке грантов Международного научно-технического центра No. A-1241 и Армянского Национального Фонда Науки и Образования (ANSEF) No. PS-10-2005 и PS-11-2005.

ЛИТЕРАТУРА

1. **K. Heun**, Math. Ann. **33**, 161 (1889).
2. **A. Ronveaux**, Heun's Differential Equations (Oxford University Press, London, 1995); **S.Yu. Slavyanov and W. Lay**, Special functions (Oxford University Press, Oxford, 2000).
3. **A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F.G. Tricomi**, Higher Transcendental Functions, vol. **3** (McGraw-Hill, New York, 1955); **C. Snow**, Hypergeometric and Legendre Functions with Applications to Integral Equations of Potential Theory (Appl. Math. Series vol. **19**) (National Bureau of Standards, Washington, DC, 1952).
4. **M. Abramowitz and I.A. Stegun**, Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York, 1965).
5. **R.S. Maier**, J. Diff. Equations **213**, 171 (2005).
6. **K. Kuiken**, SIAM J. on Math. Anal. **10**, 655 (1979); **G.S. Joyce**, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **445**, 463 (1994); **P.A. Clarkson and P.J. Olver**, J. Diff. Equations **124**, 225 (1996); **P. Ivanov**, J. Physics A **34**, 8145 (2001); **R.S. Maier**, J. Diff. Equations **198**, 16 (2004).
7. **N. Svartholm**, Math. Ann. **116**, 413 (1939); **A. Erdélyi**, Duke Math. J. **9**, 48 (1942); **A. Erdélyi**, Q. J. Math. (Oxford) **15**, 62 (1944); **D. Schmidt**, J. Reine Angew. Math. **309**, 127 (1979).
8. **E.G. Kalnins and W. Miller**, Jr., SIAM J. Math. Anal **22**, 1450 (1991).
9. **R.V. Craster and A.V. Shanin**, IMA J. Appl. Math **13**, 617 (2002); **R.V. Craster and V.H. Hoang**, Proc. Roy. Soc. A **454**, 1241 (1998).
10. **A.M. Ishkhanyan and K.-A. Suominen,** J. Phys. A **36**, L81 (2003).
11. **Artur Ishkhanyan,** J. Phys. A **38**, L491 (2005).

ՀՈՅՆԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ՝ ՀԻՊԵՐԵԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐՈՎ ԱՐՏԱՀԱՅՏՎՈՂ ՆՈՐ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Ռ .Ս. ՍՈԽՈՅԱՆ, Դ. ՅՈՒ. ՄԵԼԻՔՋԱՆՅԱՆ, Ա. Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ

Ներկայացված են Հոյնի ընդհանուր հավասարման լուծումների նոր վերլուծություններ հիպերերկրաչափական ֆունկցիաների շարքերի: Վերլուծության ֆունկցիաներ հանդիսացող Գաուսի հիպերերկրաչափական ֆունկցիաների ձևը տարբերվում է նախկինում օգտագործած ֆունկցիաների ձևից: Ստացված են երեք նման վերլուծություն ու ապա շարքը կտրելու միջոցով առկա պարամետրերի մի քանի հավաքածուների համար արտածված են փակ լուծումներ:

NEW HYPERGEOMETRIC SERIES SOLUTIONS TO THE GENERAL HUEN EQUATION

R.S. SOKHOYAN, D.Yu. MELIKDZANIAN and A.M. ISHKHANYAN

We introduce new hypergeometric series expansions of the solutions to the general Heun equation. The form of the Gauss hypergeometric functions used as expansion functions differs from that used

before. We derive three such expansions and further generate, by termination of the series, closed-form solutions for several sets of involved parameters.