Известия НАН Армении, Физика, т.41, 3, с. 23-29 (2006)

УДК 535.016

РЕЖИМЫ СИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ ПРИ ДВУХМОДОВОЙ ФОТОАССОЦИАЦИИ АТОМАРНЫХ БОЗЕ-КОНДЕНСАТОВ

Р.С. СОХОЯН[1], П.Т. ДЖУЛАКЯН[2], А.М. ИШХАНЯН[1]

[1]Инженерный центр НАН Армении
[2]Институт физики, Университет Поль Верлен - Мец, Франция

(Поступила в редакцию 17 января 2006 г.)

Выявлены два различных сильно нелинейных сценария одноцветной двухмодовой фотоассоциации атомарных Бозе-Эйнштейновских конденсатов, соответствующие большим и малым расстройкам частоты приложенного лазерного поля. Изучением произвольных конфигураций внешнего поля показано, что процесс фотоассоциации в первом случае почти неосцилляционен во времени, в то время как во втором случае эволюция системы проявляет сильно выраженные осцилляции типа Раби.

В настоящей работе исследуется динамика формирования молекул при когерентном взаимодействии атомарного Бозе-Эйнштейновского конденсата с оптическим лазерным полем. Рассматривается базисный случай одноцветной двухмодовой фотоассоциации, описываемый следующей системой связанных нелинейных уравнений первого порядка [1]:

$$i\frac{da_1}{dt} = Ue^{-i\delta}\bar{a}_1 a_2, \quad i\frac{da_2}{dt} = \frac{U}{2}e^{+i\delta}a_1 a_1, \tag{1}$$

которая трактует атомарные и молекулярные конденсаты как классические поля. Здесь a_1 и a_2 представляют собой, соответственно, амплитуды свободного атомарного и связанного молекулярного состояний, $\bar{a}_1$ - комплексно сопряженное к a_1, $U(t)$ - частота Раби, и $\delta(t)$ - функция модуляции расстройки, которая определяется как интеграл от расстройки частоты поля. Налагаются следующие начальные условия: $|a_2(-\infty)|^2 = 0$, $|a_1(-\infty)|^2 = 1$. Система (1) имеет первый интеграл, выражающий сохранение общего числа частиц: $|a_1|^2 + 2|a_2|^2 = \text{const} = I_N$. Ниже для определенности мы полагаем $I_N = 1$.

В данном исследовании мы концетрируем внимание на случае сильного взаимодействия, когда нелинейность наиболее выражена. Предполагая произвольные конфигурации внешнего поля, мы рассматриваем возможные общие предельные случаи. Оказывается, что возможны два различных режима. В первом случае, соответствующем большим расстройкам частоты и высоким интенсивностям поля, переход атомов в связанное молекулярное состояние происходит почти неосцилляционно во времени (наблюдаются лишь слабо выраженные осцилляции между двумя модами населенностей). Наоборот, в режиме малой расстройки смешанная атомо-молекулярная система проявляет

осцилляции типа Раби большой амплитуды между населенностями. Мы иллюстрируем особенности этих двух режимов, на примерах модели Розена-Зинера без пересечения резонанса [2]

$$U(t)=\frac{U_0}{\mathrm{ch}(t/\tau)},\quad \delta_t=2\delta_1 \tag{2}$$

и первой модели Демкова-Кунике с квазилинейным пересечением резонанса [3]

$$U(t)=\frac{U_0}{\mathrm{ch}(t/\tau)},\ \delta_t=2\delta_1 th(t/\tau) \tag{3}$$

(без потери общности мы полагаем $\tau=1$). Модели с многократным пересечением резонанса не рассматриваются.

Ранее было показано, что динамика вероятности молекулярного состояния $p(t)=|a_2|^2$ описывается следующим обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением третьего порядка [4]:

$$p_{ttt}-\left(\frac{\delta_{tt}}{\delta_t}+2\frac{U_t}{U}\right)p_{tt}+\left[\delta_t^2+4U^2(1-3p)-\left(\frac{U_t}{U}\right)_t+\frac{U_t}{U}\left(\frac{\delta_{tt}}{\delta_t}+\frac{U_t}{U}\right)\right]p_t+$$
$$+\frac{U^2}{2}\left(\frac{\delta_{tt}}{\delta_t}-\frac{U_t}{U}\right)(1-8p+12p^2)=0. \tag{4}$$

Как видно, нелинейность в рассматриваемой задаче определяется текущим значением $p(t)$. Следовательно, режим сильной нелинейности может быть определен как режим при котором вероятность $p(t)$ в течение эволюции системы принимает (относительно) большие значения (отметим, что вследствие условия нормировки p не может превзойти $1/2$).

Уравнение (4) имеет довольно сложную структуру, однако оно значительным образом упрощается при постоянной амплитуде поля. Существенно, что система (1) для призвольной модели с переменной амплитудой поля путем преобразования независимого переменного

$$z(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{U(t')}{U_0}dt' \tag{5}$$

может быть сведена к эквивалентной системе с постоянной амплитудой внешнего поля [5] (обычно принимается $U_0=\mathrm{Max}[U(t)]$). Это преобразование приводит уравнение (4) к следующему намного более простому виду:

$$p_{zzz}-\frac{\delta^*_{zz}}{\delta^*_z}p_{zz}+\left[\delta^{*2}_z+4U_0^2(1-3p)\right]p_z+\frac{U_0^2}{2}\frac{\delta^*_{zz}}{\delta^*_z}\left(1-8p+12p^2\right)=0, \tag{6}$$

где эффективная расстройка δ^*_z определяется как

$$\delta^*_z(z(t))=\delta_t(t)\frac{U_0}{U(t)}. \tag{7}$$

Нелинейные члены в уравнении (6) пропорциональны интенсивности поля U_0^2. Следовательно, можно ожидать, что режим сильной нелинейности соответствует большим напряженностям поля, и потому мы полагаем, что U_0^2 - большой параметр. Отметим,

далее, что функция δ_z^{*2} также может принимать большие значения (например, в случае модели Ландау-Зинера $\delta_z^{*2} \sim t^2$ [6]). По этой причине, примем, что ведущими членами уравнения (6) являются последние два члена и на время пренебрежем первыми двумя членами. В результате получим следующее нелинейное уравнение первого порядка:

$$\left[\delta_z^{*2} + 4U_0^2(1-3p_0)\right]p_{0z} + \frac{U_0^2}{2}\frac{\delta_{zz}^*}{\delta_z^*}\left(1-8p_0+12{p_0}^2\right)=0\,. \tag{8}$$

Это уравнение имеет тривиальные стационарные решения $p_0=1/2$ и $p_0=1/6$, которые, как будет показано ниже, играют важную роль при определении асимптот решения уравнения (6).

Несмотря на свою сложность, предельное уравнение (8) точно решается для призвольной функции δ_z^*. Действительно, можно найти такое преобразование независимой переменной $z \to s$, которое сводит нелинейное уравнение (8) к линейному уравнению для новой переменной s, если s рассматривать как ***зависимую*** переменную, а p_0 - как независимую. Это достигается путем выбора $s = {U_0}^2/\delta_z^{*2}$. После несложных преобразований получается следующее уравнение:

$$\frac{{U_0}^2}{\delta_z^{*2}} = \frac{C + p_0(p_0-1/2)^2}{9(p_0-1/6)^2(p_0-1/2)^2}\,, \tag{9}$$

где C - постоянная, которая должна быть определена из начальных условий. Из этого уравнения можно сделать важное общее заключение, состоящее в том, что в точке пересечения резонанса вероятность молекулярного состояния строго равна (в рамках применимости предельного уравнения) $1/6$. Отсюда далее следует, что для моделей без прохождения резонанса вероятность молекулярного состояния не может превзойти $1/6$, следовательно, пересечение резонанса является необходимым условием создания значительной населенности молекулярного уровня.

Легко видеть, что для определения постоянной C в уравнении (9) надо рассмотреть поведение функции δ_z^{*2} при $t \to -\infty$. Нетрудно проверить, что для модели Розена-Зинера (2) и первой модели Демкова-Кунике (3) имеет место $\lim\limits_{t\to-\infty}\left|\delta_z^*\right| = \infty$. Налагая теперь начальное условие $p_0(t=-\infty)=0$, получаем $C=0$. Но даже теперь p_0 не определена однозначно. Для того, чтоб сделать правильный выбор надо сравнить p_0 с численным решением точного уравненния (4). Сравнение показывает, что должна быть взята следующая ветвь решения уравнения (9):

$$p_0 = \frac{1}{6} + \frac{\delta_z^*}{18U_0}\left(\frac{\delta_z^*}{U_0} - S\sqrt{\left(\frac{\delta_z^*}{U_0}\right)^2+6}\right), \tag{10}$$

где

$$S = \mathrm{sgn}\left(\lim_{t\to-\infty}\delta_t(t)\right). \tag{11}$$

Отметим, что, если в течение эволюции предельное решение (10) превосходит максимальное допустимое значение $1/2$, то оно должно быть скомбинировано с тривиальным решением $p_0=1/2$. Это происходит, например, в случае первой модели Демкова-Кунике (см. Рис.1)

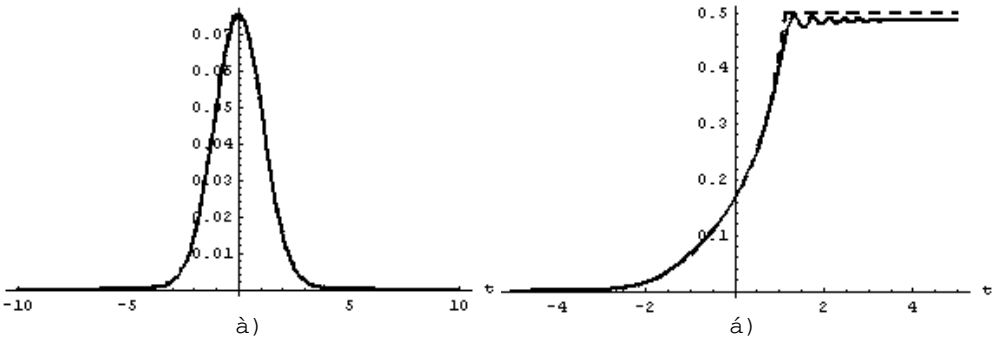


Рис.1. Вероятность молекулярного состояния как функция времени. Сплошная линия - численное решение, пунктирная линия – предельное решение (10). а) Модель Розена-Зинера. $U_0 = 20$, $\delta_1 = 10$ б) Первая модель Демкова-Кунике. $U_0 = 20$, $\delta_1 = 10$.

Полученное предельное решение (10) является довольно точным приближением. Это показано на Рис.1, где мы сравниваем это решение с численным решением уравнения (4). Далее, это решение позволяет сделать несколько общих качественных выводов практической важности.

Предположим, что предельное решение p_0 всегда остается меньше $1/2$ или, что равносильно, $\delta_t / U \le \sqrt{2}$, если $S = -1$, и $\delta_t / U \ge -\sqrt{2}$, если $S = 1$. Тогда, если

$$\lim_{t\to-\infty} \delta_z^*(z(t)) = \lim_{t\to+\infty} \delta_z^*(z(t)), \qquad (12)$$

то после взаимодействия система возвращается в свое начальное чистое атомарное состояние. Это происходит, например, когда конфигурация внешнего поля определяется моделью Розена-Зинера (2). Теперь, пусть вдобавок δ_z^* остается ограниченной в окрестности точки $t = +\infty$ при любых конечных значениях параметров расстройки и частоты Раби. Тогда конечная вероятность перехода стремится к $1/6$, когда $U_0 = \max[U(t)]$ стремится к бесконечности. Этот результат показывает, что применение больших интенсивностей поля не всегда эффективно для получения большой конечной молекулярной популяции.

Общей чертой полученных предельных решений для модели Розена-Зинера и для первой модели Демкова-Кунике является их неосцилляционное поведение. Для нахождения условий при которых такое поведение имеет место мы сравнили приближенные решения с численными. Анализ показал, что предельное решение сильно отклоняется от численного по мере уменьшения δ_1 и U_0 (Рис.2). Окончательно, можно заключить, что решение (10) является хорошим приближением при $U_0 >> 1$ и $\delta_1 > 1$.

Таким образом, для построения приближенного решения в области изменения параметров $U_0 >> 1$ и $\delta_1 < 1$ должен быть разработан иной подход. Численный анализ показывает, что в последнем случае поведение системы гораздо более «нестабильно»: для временной эволюции вероятности молекулярного состояния характерны быстрые осцилляции с большой амплитудой и переменной частотой. Так что этот предел представляет собой более сложную задачу. В этом случае допустимое приближение строится, факторизовав точное уравнение третьего порядка для вероятности молекулярного состояния (6) следующим образом:

$$\left(\frac{d}{dz}-\frac{\delta^*_{zz}}{\delta^*_z}\right)\left(p_{zz}-\frac{U_0^2}{2}\left(1-8p+12p^2\right)+\delta^{*2}_z p\right)-\delta^*_z\delta^*_{zz}p=0\,. \qquad (13)$$

В случае малой расстройки последний член этого уравнения довольно мал. Более того, следует принять во внимание, что все наиболее значимые изменения в динамике системы происходят в окрестности резонанса. Следовательно роль последнего члена в уравнении (13) весьма ограничена, и им можно пренебречь. Далее, один раз проинтегрируем полученное усеченное уравнение и разложим его коэффициенты в степенной ряд в окрестности точки $z=0$, оставив лишь члены нулевого порядка. В результате получим следующее приближенное решение, которое выражается через эллиптический синус Якоби [7]:

$$\tilde{p}=p_1\,\mathrm{sn}^2[\sqrt{p_2}U_0(z-z_0);m]\,, \qquad (14)$$

где
$$p_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^{*2}_0}{4U_0^2}+1\right)\mp\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\delta^{*2}_0}{4U_0^2}+1\right)^2-\frac{1}{4}}\,,\ \delta^*_0=\lim_{z\to 0}\delta^*_z\ \text{и}\ m=\frac{p_1}{p_2}\,. \qquad (15)$$

Функция (14) является периодической функцией с периодом

$$T(m)=\frac{\pi}{\sqrt{p_2}U_0}\cdot{}_2F_1(1/2,1/2;1;m)\,. \qquad (16)$$

Сравнение полученного решения с численным показывает, что совпадение достаточно хорошее лишь в начале взаимодействия. Однако этот результат может быть существенно улучшен подбором значения параметра δ^*_0, входящего в решение (14)-(15). Сперва численным расчетом можно убедиться, что всегда может быть найдено такое значение параметра $\delta^*_0=\tilde{\delta}_0$ при котором приближенное решение (14) превосходно совпадает с численным (Рис.3). Далее, путем применения метода Линштедта-Пуанкаре [8] может быть найдено аналитическое выражение для $\tilde{\delta}_0$ как функции параметров расстройки и частоты Раби (в частности, для модели Розена-Зинера получается $\tilde{\delta}_0=1.2U_0\delta_1$).

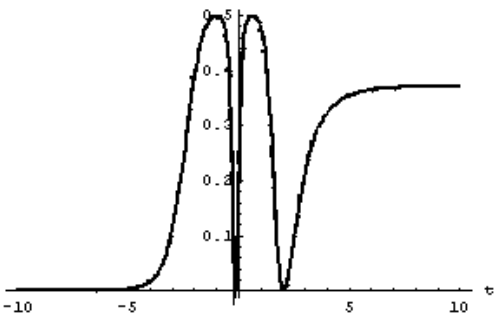


Рис.3. Вероятность молекулярного состояния для модели Розена-Зинера. Сплошная линия - численное решение, пунктирная линия - приближенное решение (14). $U_0=7.2$, $\delta_1=0.004$, $\tilde{\delta}_0\approx 0.0524$.

Решение (14) аналогично решению нелинейной задачи Раби [9]. Как видим, полученное решение (14) является универсальным для

произвольных форм импульса и функций модуляции расстройки: изменение конфигурации лазерного поля влияет лишь на его аргумент и на выражение для $\tilde{\delta}_0$, оставляя саму функцию неизменной. Следовательно, в этом режиме взаимодействия качественное поведение системы менее чувствительно к конкретнй форме лазерного возбуждения. Другой интересной чертой является тонкая зависимость частоты колебаний вероятности молекулярного состояния от параметров модуляции поля [см. уравнение (16)]. В частности, зависимость частоты колебаний от амплитуды поля нелинейна и, более того, осцилляционна.

Таким образом, мы проанализировали предел сильного взаимодействия ($U_0 >> 1$) при одноцветной двухмодовой фотоассоциации атомарного Бозе-конденсата и разработали общую стратегию решения задачи для произвольных форм импульса и функций модуляции расстройки. Мы показали, что существуют два различных сценария динамики системы - режимы малых и больших расстроек. Основной особенностью процесса фотоассоциации в режиме большой расстройки является его почти неосцилляционное поведение, то есть имеют место лишь слабо выраженные осцилляции между атомарным и молекулярным населенностями. Этот режим удовлетварительно аппроксимируется неосцилляционным предельным решением (10). Наоборот, в режиме малой расстройки эволюция системы является существенно осцилляционной: В данном случае решение выражается через осцилляционную синус-функцию Якови. Причину возникновения осцилляций можно качественно понять, рассмотрев эффективное время взаимодействия для рассматриваемых моделей (2)-(3). При достаточно большом параметре расстройки δ_1 во временных точках далеких от $t = 0$, где амплитуда поля близка к нулю, взаимодействие довольно слабо, и состояние системы практически не меняется. Однако в случае малых δ_1 эффективное время взаимодействия, которое пропорционально $1/\delta_1$, большое и, следовательно, в течение этого периода времени система значительно меняет свое состояние, несмотря на малость частоты Раби: возникают осцилляции типа Раби с большой амплитудой.

Работа выполнена при поддержке грантов Международного научно-технического центра (ISTC) No. A-1241 и Армянского Национального Фонда Науки и Образования (ANSEF) No. PS-10-2005.

ЛИТЕРАТУРА

1. **M. Koštrun, M. Mackie, R. Cote, and J. Javanainen,** Phys. Rev. A **62**, 063616 (2000).
2. **N. Rosen and C. Zener,** Phys. Rev., **40**, 502 (1932).

3. **Yu.N. Demkov and M. Kunike,** Vestn. Leningr. Univ. Fiz. Khim. **16**, 39 (1969); **K.-A. Suominen and B.M. Garraway,** Phys. Rev. A **45**, 374 (1992).
4. **A.M. Ishkhanyan,** J. Contemp. Physics (Armenian Ac. Sci.), **39**(2), 1 (2004).
5. **A. Ishkhanyan, J. Javanainen and H. Nakamura,** Proc. of Conf. Laser Physics-2003, Ashtarak, 112 (2003).
6. **A. Ishkhanyan, J. Javanainen and H. Nakamura,** Phys. A: Math. Gen. **38**, 3505 (2005).
7. **M. Abramowitz and I.A. Stegun,** Handbook of Mathematical Functions (Dover, New York, 1965).
8. **A.H. Nayfeh,** Perturbation Methods (New York, Wiley, 1985).
9. **A. Ishkhanyan, G. Chernikov and H. Nakamura,** Phys. Rev. A **70**, 053611 (2004).

ԱՏՈՄԱԿԱՆ ԲՈԶԵ-ԿՈՆԴԵՆՍԱՏՆԵՐԻ ԵՐԿՄՈԴ ՖՈՏՈԱՍՈՑԻԱՑԻԱՅԻ ՈՒԺԵՂ ՈՉԳԾԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ՌԵԺԻՄՆԵՐԸ

Ռ .Ս. ՍՈԽՈՅԱՆ, Պ.Տ. ՋՈՒԼՀԱԿՅԱՆ, Ա.Մ. ԻՇԽԱՆՅԱՆ

Բացահայտված են ատոմական Բոզե-էյնշտեյնյան կոնդենսատների երկմոդ միագույն ֆոտոասոցիացիայի երկու տարբեր ուժեղ ոչ-գծային սցենարներ, որոնք համապատասխանում են կիրառված լազերային դաշտի հաճախության մեծ և փոքր ապալարքերին: Ուսումնասիրելով արտաքին դաշտի կամայական կոնֆիգուրացիաներ՝ ցույց է տրվել, որ առաջին դեպքում ֆոտոասոցիացիայի պրոցեսը համարյա մոնոտոն է ժամանակի մեջ, մինչդեռ երկրորդ դեպքում համակարգի էվոլյուցիան դրսևորում է խիստ արտահայտված Ռաբիի տիպի տատանումներ:

STRONG NONLINEARITY REGIMES OF TWO-MODE PHOTOASSOCIATION OF ATOMIC BOSE-CONDENSATES

R.S. SOKHOYAN, B.T. JOULAKIAN, and A.M. ISHKHANYAN

Two distinct strongly non-linear scenarios of two-mode one-color photoassociation of atomic Bose-Einstein condensates corresponding to large and small detunings of applied laser field frequency have been revealed. By examining arbitrary external field's configurations, we have shown that the photoassociation process in the first case is almost non-oscillatory in time while in the second case the evolution of the system displays strongly pronounced Rabi-type oscillations.